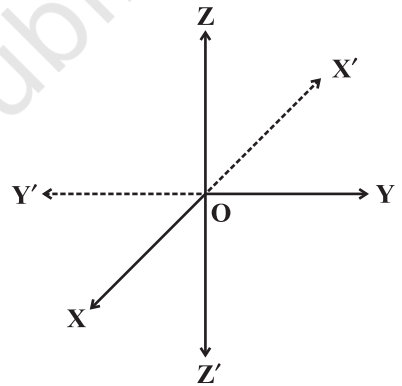
अध्याय 12

त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय

12.1 समग्र अवलोकन (Overview)

12.1.1 *निर्देशांक अक्ष एवं निर्देशांक तल (Coordinate axes and coordinate planes)*

मान लीजिए X′OX, Y′OY, Z′OZ तीन परस्पर लंब रेखाएं हैं जो बिंदु O से इस प्रकार जाती हैं कि X′OX एवं Y′OY कागज के तल पर स्थित हैं और Z′OZ कागज के तल पर लंब है। ये तीन रेखाएं समकोणिक अक्ष कहलाती हैं (रेखाएं X′OX, Y′OY एवं Z′OZ क्रमश: x-अक्ष, y-अक्ष एवं z-अक्ष कहलाती हैं।) हम इस निर्देशांक निकाय को त्रिविमीय अंतरिक्ष अथवा केवल अंतरिक्ष कहते हैं।

इन तीन अक्षों को एक साथ युग्म रूप में लेने पर xy, yz एवं zx-तलों अर्थात् तीन निर्देशांक तलों को दर्शाते हैं। प्रत्येक तल अंतरिक्ष को दो भागों में विभक्त करता है और तीन निर्देशांक तल एक साथ मिलकर अंतरिक्ष को आठ क्षेत्रों (भागों), अर्थात (i) OXYZ (ii) OX′YZ (iii) OXY′Z (iv) OXYZ′ (v) OXY′Z′ (vi) OX′YZ′ (vii) OX′Y′Z (viii) OX′Y′Z′ (आकृति 12.1), में बाँटते हैं। ये आठ भाग अष्टांशक (Octant) कहलाते हैं।

आकृति 12.1

मान लीजिए P एक ऐसा बिंदु है जो निर्देशांक तल में नहीं बल्कि अंतरिक्ष में स्थित है। बिंदु P से निर्देशांक तलों yz, zx एवं xy के समांतर ऐसे तल खींचिए जो निर्देशांक अक्षों को क्रमश: बिंदुओं A, B एवं C पर मिलें।

वे तीन तल इस प्रकार है:

(i) ADPF || yz-तल (ii) BDPE || xz-तल (iii) CFPE || xy-तल

ये तल एक समकोणिक षट्फलकीय को दर्शाते हैं जिसमें समकोणिक फलों के तीन युग्म (A D P F, O B E C), (B D P E, C F A O) एवं (A O B D, FPEC) होते हैं (आकृति 12.2)

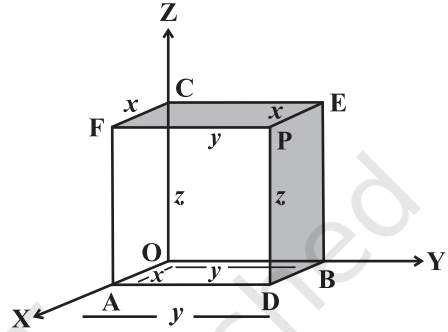
12.1.2 *अंतरिक्ष में एक बिंदु के निर्देशांक (Coordinate of a point in space)*

त्रिविमीय अंतरिक्ष में किसी स्वेच्छ बिंदु P के निर्देशांक (x_0, y_0, z_0) होते हैं, यदि

(1) yz-तल के समांतर बिंदु P से जाने वाला तल x-अक्ष को $(x_0, 0, 0)$ पर प्रतिच्छेद करता है।

(2) zx-तल के समांतर बिंदु P से जाने वाला तल y-अक्ष को $(0, y_0, 0)$ पर प्रतिच्छेद करता है।

(3) xy-तल के समांतर बिंदु P से जाने वाला तल z-अक्ष को $(0, 0, z_0)$ पर प्रतिच्छेद करता है।

अंतरिक्ष निर्देशांक (x_0, y_0, z_0), बिंदु P के कार्तीय निर्देशांक अथवा समकोणिक निर्देशांक कहलाते हैं। इसके अतिरिक्त हम कह सकते हैं कि तल ADPF (आकृति 12.2) x-अक्ष पर लंब है अथवा x-अक्ष तल ADPF पर लंब है और इस प्रकार x-अक्ष तल ADPF की प्रत्येक रेखा पर लंब है। इसलिए PA एवं OX परस्पर लम्ब हैं। अतः बिंदु A, बिंदु P से x-अक्ष पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु है और इस पाद बिंदु A की, बिंदु O से दूरी, बिंदु P का x-निर्देशांक है। इसी प्रकार हम कह सकते हैं कि B एवं C किन्तु P से क्रमशः y-अक्ष एवं z-अक्ष पर खींचे गए लंबों के पाद बिंदु हैं। इन पाद बिंदुओं B एवं C को बिंदु O से दूरियां बिंदु P के क्रमशः y एवं z निर्देशांक है।

अतः बिंदु P के निर्देशांक x, y z बिंदु P की तीन निर्देशांक तलों yz, zx एवं xy से क्रमशः दूरियां हैं।

आकृति 12.2

12.1.3 *एक बिंदु के निर्देशांकों के चिह्न (Sign of coordinates of a point)*

OX, OY, OZ के अनुदिश अथवा समांतर मापी गई दूरी धनात्मक ली जाती है एवं OX′, OY′, OZ′ के अनुदिश अथवा समांतर मापी गई दूरी ऋणात्मक ली जाती है, तीन परस्पर लंब निर्देशांक तल अंतरिक्ष को आठ भागों में विभक्त करते हैं जिनमें से प्रत्येक भाग अष्टांशक (octant) कहलाता है। किसी बिंदु के निर्देशांकों के चिह्न उस अष्टांशक (octant) पर निर्भर करते हैं जिसमें वह बिंदु स्थित है। प्रथम अष्टांशक (octant) में सभी निर्देशांक धनात्मक होते हैं और सातवें अष्टांशक (octant) में सभी निर्देशांक ऋणात्मक होते हैं। तीसरे अष्टांशक (octant) में x, y निर्देशांक ऋणात्मक एवं z धनात्मक होते हैं। पाँचवें अष्टांशक (octant) में x, y धनात्मक एवं z ऋणात्मक होते हैं। चतुर्थ अष्टांशक (octant) में x, z धनात्मक एवं y ऋणात्मक होते हैं। छठे अष्टांशक (octant) में x, z ऋणात्मक एवं y धनात्मक होते हैं। दूसरे अष्टांशक (octant) में x ऋणात्मक एवं y, z धनात्मक होते हैं।

अष्टांशक → निर्देशांक ↓	I OXYZ	II OX′YZ	III OX′Y′Z	IV OXY′Z	V OXYZ′	VI OX′YZ′	VII OX′Y′Z′	VIII OXY′Z′
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

12.1.4 दूरी सूत्र (*Distance formula*)

दो बिंदुओं P (x_1, y_1, z_1) एवं Q (x_2, y_2, z_2) के बीच की दूरी

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$ से प्राप्त होती है।

बिंदुओं (x_1, y_1, z_1) एवं (x_2, y_2, z_2) से निर्देशांक तलों के समांतर खींचे गए तल एक षट्फलकीय का निर्माण करते हैं। षट्फलकीय के किनारों की लम्बाई $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ एवं विकर्ण की लम्बाई $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ होती है।

12.1.5 विभाजन सूत्र (*Section formula*)

बिंदुओं P(x_1, y_1, z_1) एवं Q(x_2, y_2, z_2) को मिलाने वाले रेखाखंड को अंत: अथवा बाह्यत: $m : n$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु R के निर्देशांक क्रमश:

$$\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}, \text{ एवं } \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}$$ हैं।

बिंदुओं P (x_1, y_1, z_1) एवं Q (x_2, y_2, z_2) को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु के निर्देशांक

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$ हैं।

एक त्रिभुज जिसके शीर्ष (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) एवं x_3, y_3, z_3 पर हैं, के केन्द्रक के निर्देशांक

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$$ हैं।

12.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय उदाहरण

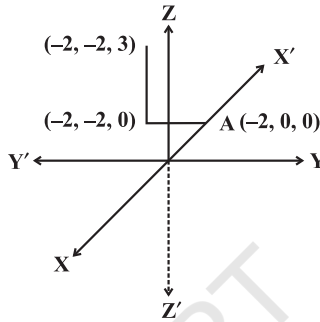
उदाहरण 1 बिंदु (i) (2, 3, 4) (ii) (–2, –2, 3) का अंतरिक्ष में स्थान निर्धारित (locate) कीजिए।

हल

(i) बिंदु (2, 3, 4) को अंतरिक्ष में स्थान निर्धारित (locate) करने के लिए हम बिंदु O से x-अक्ष की धनात्मक दिशा के अनुदिश 2 इकाई आगे बढ़ते हैं मान लीजिए यह बिंदु A(2, O, O) है। इस बिंदु A से y-अक्ष की धनात्मक दिशा के समांतर 3 इकाई की दूरी तय कीजिए। मान लीजिए यह बिंदु

आकृति 12.3

B(2, 3, 0) है। इस बिंदु B से z-अक्ष की धनात्मक दिशा के अनुदिश 4 ईकाई की दूरी तय कीजिए। मान लीजिए यह बिंदु P(2, 3, 4) है।

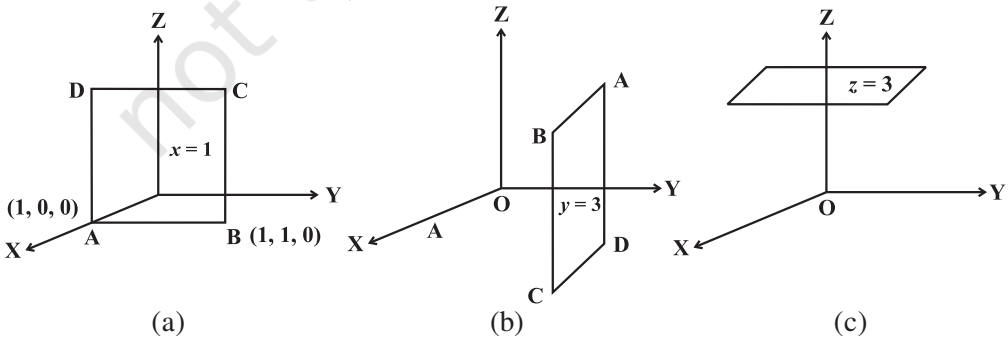
(ii) मूल बिंदु से x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा के अनुदिश 2 इकाई की दूरी तय कीजिए। मान लीजिए यह बिंदु A(–2, 0, 0) है। इस बिंदु A से y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा के समांतर 2 इकाई दूरी तय कीजिए। मान लीजिए यह बिंदु (–2, –2, 0), बिंदु B से z-अक्ष की धनात्मक दिशा के समांतर 3 इकाई दूरी तय कीजिए। यह हमारा अभीष्ट बिंदु Q (–2, –2, 3) है (आकृति 12.4)

आकृति 12.4

उदाहरण 2 निम्नलिखित तलों का रेखाचित्र बनाईए (i) $x = 1$ (ii) $y = 3$ (iii) $z = 3$

हल

(i) तल का समीकरण $x = 0$, yz तल को निरूपित करता है और तल का समीकरण $x = 1$, yz तल के समांतर एक ऐसे तल को निरूपित करता है जो yz तल से ऊपर की तरफ 1 इकाई की दूरी पर है। अब हम yz तल के समांतर, ऊपर की तरफ एक इकाई की दूरी पर एक अन्य तल खींचते हैं। (आकृति 12.5 (*a*))

(ii) तल का समीकरण $y = 0$, xz तल को निरूपित करता है और तल का समीकरण $y = 3$, एक ऐसे तल को निरूपित करता है जो xz तल के समांतर है और xz तल से ऊपर की तरफ 3 इकाई की दूरी पर स्थित है (आकृति 12.5 (*b*))

(iii) तल का समीकरण $z = 0$, xy तल को निरूपित करता है और $z = 3$, xy तल के समांतर ऊपर की दिशा में 3 ईकाई की दूरी पर एक अन्य तल को निरूपित करता है। (आकृति 12.5 (c))

आकृति 12.5

उदाहरण 3 मान लीजिए बिंदु P (3, 4, 5) से x, y एवं z अक्ष पर खींचे गए लंबों के पाद बिंदु क्रमशः L, M एवं N हैं। L, M एवं N के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि बिंदु L, बिंदु P से x-अक्ष पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु है इसलिए इसके y एवं z निर्देशांक शून्य हैं। अतः L के निर्देशांक (3, 0, 0) हैं। इसी प्रकार M एवं N के निर्देशांक (0, 4, 0) एवं (0, 0, 5) हैं।

उदाहरण 4 मान लीजिए L, M, N किसी बिंदु P(3, 4, 5) से क्रमशः xy, yz एवं zx तलों पर खींचे गए लंब-खंडों के पाद बिंदु हैं। L, M एवं N के निर्देशांक क्या हैं?

हल क्योंकि L बिंदु P से xy तल पर खींचे गए लंबखंड का पाद बिंदु है और xy तल पर z निर्देशांक शून्य है, इसलिए L के निर्देशांक (3, 4, 0) हैं। इसी प्रकार हम M (0, 4, 5) एव N (3, 0, 5) ज्ञात कर सकते हैं।

आकृति 12.6

उदाहरण 5 मान लीजिए L, M, N किसी बिंदु P(3, 4, 5) से क्रमशः xy, yz एवं zx तलों पर खींचे गए लंबखंडों के पाद बिंदु है। इन बिंदुओं L, M, N का बिंदु P से दूरियां ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि L बिंदु P से xy तल पर खींचे गए लंबखंड का पाद बिंदु है। इसलिए बिंदु के निर्देशांक (3, 4, 0) है। बिंदु (3, 4, 5) एवं बिंदु (3, 4, 0) के बीच की दूरी 5 इकाई है। इसी प्रकार हम yz एवं zx तल पर खींचे गए लंबखंडों की लम्बाई ज्ञात कर सकते हैं जो क्रमशः 3 इकाई एवं 4 इकाई है।

आकृति 12.7

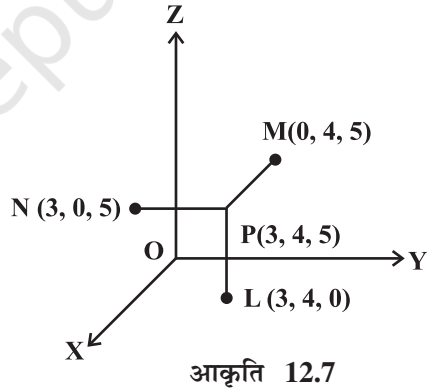
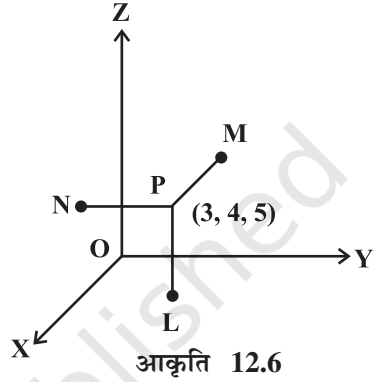
उदाहरण 6 दूरी सूत्र का उपयोग करते हुए दर्शाइए कि बिंदु P (2, 4, 6), Q (– 2, – 2, – 2) एवं R (6, 10, 14) संरेख हैं।

हल तीन बिंदु संरेख होते हैं यदि दो दूरियों का योग तीसरी दूरी के समान है।

$$PQ = \sqrt{(-2-2)^2+(-2-4)^2+(-2-6)^2} = \sqrt{16+36+64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

$$QR = \sqrt{(6+2)^2+(10+2)^2+(14+2)^2} = \sqrt{64+144+256} = \sqrt{464} = 4\sqrt{29}$$

$$PR = \sqrt{(6-2)^2+(10-4)^2+(14-6)^2} = \sqrt{16+36+64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

क्योंकि QR = PQ + PR इसलिए दिए हुए बिंदु संरेख हैं।

उदाहरण 7 चार बिंदुओं O (0, 0, 0), A (l, 0, 0), B (0, m, 0) एवं C (0, 0, n) से समदूरस्थ एक बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए P (x, y, z) वांछित बिंदु है। तब OP = PA = PB = PC

अब, $OP = PA \Rightarrow OP^2 = PA^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (x - l)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 \Rightarrow x = \frac{l}{2}$

इसी प्रकार, $OP = PB \Rightarrow y = \frac{m}{2}$ और $OP = PC \Rightarrow z = \frac{n}{2}$

अतः वांछित बिंदु के निर्देशांक $\left(\frac{l}{2}, \frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$ हैं।

उदाहरण 8 बिंदुओं A (3, 2, 2) तथा B (5, 5, 4) से समदूरस्थ, x-अक्ष पर स्थित एक बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल x-अक्ष पर बिंदु P (x, 0, 0) के रूप का होगा। क्योंकि बिंदु A तथा B बिंदु P से समदूरस्थ हैं, इसलिए $PA^2 = PB^2$ अर्थात्

$(x - 3)^2 + (0 - 2)^2 + (0 - 2)^2 = (x - 5)^2 + (0 - 5)^2 + (0 - 4)^2$

$\Rightarrow 4x = 25 + 25 + 16 - 17$ अर्थात् $x = \frac{49}{4}$.

अतः A तथा B से समदूरस्थ, x-अक्ष पर स्थित बिंदु $\left(\frac{49}{4}, 0, 0\right)$ है।

उदाहरण 9 y-अक्ष पर एक ऐसा बिंदु ज्ञात कीजिए जो बिंदु (1, 2, 3) से $\sqrt{10}$ की दूरी पर है।

हल मान लीजिए y-अक्ष पर P कोई बिंदु हैं। इसलिए यह P(0, y, 0) के रूप में है।

बिंदु (1, 2, 3), बिंदु P(0, y, 0) से $\sqrt{10}$ की दूरी पर है।

इसलिए $\sqrt{(1-0)^2 + (2-y)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow \quad y^2 - 4y + 4 = 0 \Rightarrow (y - 2)^2 = 0 \Rightarrow y = 2$

अतः (0, 2, 0) अभीष्ट बिंदु है।

उदाहरण 10 यदि बिंदुओं (2, 3, 5) एवं (5, 9, 7) से निर्देशांक अक्षों के समांतर खींचे गए तलों से एक षट्फलकीय बनाया गया है, तो उस षट्फलकीय के किनारों एवं विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल षट्फलकीय के किनारों की लम्बाई 5 – 2, 9 – 3, 7 – 5 अर्थात् 3, 6, 2 हैं।

विकर्ण की लम्बाई $\sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = 7$ इकाई है।

उदाहरण 11 दर्शाइए कि बिंदु (0, 7, 10), (–1, 6, 6) एवं (– 4, 9, 6) एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज बनाते हैं।

हल मान लीजिए दिए हुए तीन बिंदु P (0, 7, 10), Q (–1, 6, 6) एवं R (– 4, 9, 6) हैं।

यहां $PQ = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2}$

$QR = \sqrt{9+9+0} = 3\sqrt{2}$

$PR = \sqrt{16+4+16} = 6$

अब $PQ^2 + QR^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 18 + 18 = 36 = (PR)^2$

इसलिए Δ PQR एक समकोण त्रिभुज है। साथ ही, PQ = QR अत: Δ PQR समद्विबाहु है।

उदाहरण 12 दर्शाइए कि बिंदु (5, –1, 1), (7, – 4, 7), (1 – 6, 10) एवं (–1, – 3, 4) एक सम चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

हल मान लीजिए A (5, – 1, 1), B (7, – 4, 7), C(1, – 6, 10) एवं D (– 1, – 3, 4), किसी चतुर्भुज के चार शीर्ष हैं।

$AB = \sqrt{4+9+36} = 7$, $BC = \sqrt{36+4+9} = 7$, $CD = \sqrt{4+9+36} = 7$,

$DA = \sqrt{23+4+9} = 7$

ध्यान दीजिए कि AB = BC = CD = DA) ABCD एक समचतुर्भुज है।

उदारहण 13 ज्ञात कीजिए कि बिंदुओं (2, 4, 5) एवं (3, 5, – 4) को मिलाने वाले रेखाखंड को xz-तल किस अनुपात में बाँटता है।

हल मान लीजिए xz तल, बिंदुओं P (2, 4, 5) एवं Q (3, 5, – 4) को मिलाने वाले रेखाखंड को $k : 1$ के अनुपात में बिंदु $R(x, y, z)$ विभाजित करता है।

$$x=\frac{3k+2}{k+1},\ y=\frac{5k+4}{k+1},\ z=\frac{-4k+5}{k+1}$$

क्योंकि बिंदु R, x, y तल में स्थित हैं इसलिए इसका y-निर्देशांक शून्य होना चाहिए

अर्थात् $$\frac{5k+4}{k+1} = 0 \Rightarrow k = -\frac{4}{5}$$

अत: अभीष्ट अनुपात –4: 5 है अर्थात् तल दिए हुए रेखाखंड को 4 : 5 के अनुपात में बाह्य विभाजित करता है।

उदाहरण 14 एक बिंदु P, बिंदु A (– 2, 0, 6) से बिंदु B (10, – 6, – 12) के बीच रास्ते के $\frac{5}{6}$ वें भाग पर स्थित है। बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए P (x, y, z) वांछित बिंदु हैं अर्थात् P, AB को 5 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है। इसलिए

$$P\,(x, y, z) = \left(\frac{5\times10+1\times-2}{5+1}, \frac{5\times-6+1\times0}{5+1}, \frac{5\times-12+1\times6}{5+1}\right) = (8, -5, -9)$$

उदाहरण 15 एक समकोणिक षट्फलकीय के शीर्ष एवं किनारा ज्ञात कीजिए यदि उसका एक शीर्ष (3, 5, 6) प्रथम अष्टांशक में है, एक शीर्ष मूल बिंदु पर है और उसके किनारे x, y एवं z अक्षों के अनुदिश हैं।

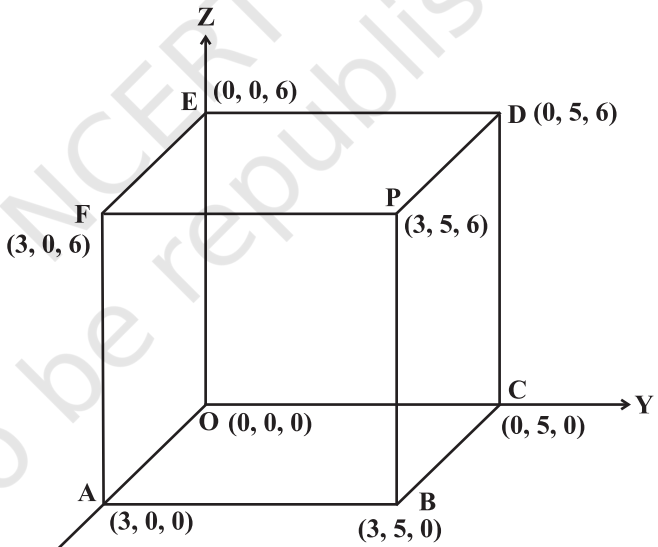
हल: षट्फलकीय के छः तल निम्न प्रकार हैं–

तल OABC, xy-तल में स्थित है। इस तल में स्थित प्रत्येक बिंदु का z निर्देशांक शून्य है। इस तल में xy का समीकरण $z = 0$, तल PDEF, xy तल के समांतर एवं ऊपर की तरफ 6 ईकाई की दूरी पर स्थित है। इस तल का समीकरण $z = 6$ है। तल ABPF, तल $x = 3$ का निरूपित करता है। तल OCDE, yz-तल में स्थित है और इस तल का समीकरण $x = 0$ है। तल AOEF, xz तल में स्थित है। इस तल में स्थित प्रत्येक बिंदु का y-निर्देशांक शून्य है। इसलिए इस तल का समीकरण $y = 0$ है।

आकृति 12.8

तल BCDP, तल AOEF के समांतर $y = 5$ की दूरी पर है।

किनारा OA, x-अक्ष पर स्थित है x-अक्ष का समीकरण $y = 0$ एवं $z = 0$ है।

किनारा OC एवं OE क्रमशः y-अक्ष एवं z-अक्ष पर स्थित हैं। y-अक्ष के समीकरण $z = 0, x = 0$ है। z-अक्ष

का समीकरण $x = 0,\ y = 0$ है। बिंदु P (3, 5, 6) की x-अक्ष से लंबवत् दूरी $\sqrt{5^2+6^2} = \sqrt{61}$ है। बिंदु P (3, 5, 6) की y-अक्ष एवं z-अक्ष से दूरियाँ क्रमशः $\sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45}$ एवं $\sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$ हैं। बिंदु P (3, 5, 6) से निर्देशांक अक्षों पर खींचे गए लम्बों के पाद बिंदुओं के निर्देशांक A, C एवं E है। बिंदु P(3, 5, 6) से निर्देशांक तलों xy, yz एवं zx पर खींचे गए लंबों के पाद बिंदुओं के निर्देशांक क्रमशः (3, 5, 0), (0, 5, 6) एवं (3, 0, 6) है। हम यह भी देखते हैं कि बिंदु P की तलों xy, yz एवं zx से लंबवत् दूरियाँ क्रमशः 6, 5 एवं 3 हैं।

उदाहरण 16 मान लीजिए तीन बिंदु A (3, 2, 0), B (5, 3, 2) एवं C (– 9, 6, – 3), एक त्रिभुज बनाते हैं। $\angle BAC$ का कोण समद्विभाजक AD, भुजा BC को D पर मिलता है। बिंदु D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल ध्यान दीजिए:

$$AB = \sqrt{(5-3)^2+(3-2)^2+(2-0)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$AC = \sqrt{(-9-3)^2+(6-2)^2+(-3-0)^2} = \sqrt{144+16+9} = 13$$

क्योंकि AD, $\angle BAC$ का कोण समद्विभाजक है इसलिए हम $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{13}$ प्राप्त करते हैं।

अर्थात् बिंदु D, BC को 3 : 13 के अनुपात में विभाजित करता है। इस प्रकार D के निर्देशांक

$$\left(\frac{3(-9)+13(5)}{3+13}, \frac{3(6)+13(3)}{3+13}, \frac{3(-3)+13(2)}{3+13}\right) = \left(\frac{19}{8}, \frac{57}{16}, \frac{17}{16}\right)$$ हैं।

उदाहरण 17 yz-तल में एक ऐसा बिंदु ज्ञात कीजिए, जो तीन बिंदुओं A (2, 0 3) B (0, 3, 2) एवं C (0, 0, 1) से समदूरस्थ है।

हल क्योंकि yz तल में स्थित किसी भी बिंदु का x-निर्देशांक शून्य है। इसलिए P (0, y, z), yz-तल में एक बिंदु हैं और PA = PB = PC

PA = PB $\Rightarrow (0-2)^2 + (y-0)^2 + (z-3)^2 = (0-0)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2$

अर्थात् $z - 3y = 0$ (1)

एवं PB = PC $\Rightarrow y^2 + 9 - 6y + z^2 + 4 - 4z = y^2 + z^2 + 1 - 2z$

अर्थात् $3y + z = 6$ (2)

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर

हम $y = 1, z = 3$ प्राप्त करते हैं। इसलिए बिंदु P के निर्देशांक (0, 1, 3) हैं।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण संख्या 18 से 23 तक प्रत्येक के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए: (M.C.Q)

उदाहरण 18 बिंदु P (3, 4, 5) से y-अक्ष पर खींचे गए लंब की लम्बाई है:

(A) 10 (B) $\sqrt{34}$ (C) $\sqrt{113}$ (D) $5\sqrt{2}$

हल मान लीजिए बिंदु P से y-अक्ष पर खींचे गए लम्ब का पाद बिंदु l है इसलिए इसके x एवं z निर्देशांक शून्य हैं अर्थात् (0, 4, 0) इसलिए बिंदुओं (0, 4, 0) एवं (3, 4, 5) के बीच की दूरी $\sqrt{9+25}$ अर्थात् $\sqrt{34}$ है।

उदाहरण 19 बिंदु P (6, 7, 8) की xy-तल से लम्बवत् दूरी है:

(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) इनमें से कोई नहीं है।

हल मान लीजिए बिंदु P(6, 7, 8) से xy तल पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु L है और इस पाद बिंदु L की P से दूरी, P के Z निर्देशांक के समान है। अर्थात् 8 ईकाई है।

उदाहरण 20 बिंदु P (6, 7, 8) से xy-तल पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु L है। बिंदु L के निर्देशांक है:

(A) (6, 0, 0) (B) (6, 7, 0) (C) (6, 0, 8) (D) इनमें से कोई

हल क्योंकि बिंदु L, बिंदु P से xy-तल पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु है और xy-तल में z निर्देशांक शून्य है। इसलिए L के निर्देशांक (6, 7, 0) हैं।

उदाहरण 21 किसी बिंदु (6, 7, 8) से x-अक्ष पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु L है। L के निर्देशांक हैं:

(A) (6, 0, 0) (B) (0, 7, 0) (C) (0, 0, 8) (D) कोई नहीं

हल क्योंकि बिंदु L, बिंदुओं से P से x-अक्ष पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु है और y एवं z-निर्देशांक शून्य हैं। अत: L के निर्देशांक (6, 0, 0) हैं।

उदाहरण 22 एक बिंदु, जिसके लिए $y = 0$, $z = 0$, का बिंदु पथ है:

(A) x-अक्ष का समीकरण (B) y-अक्ष का समीकरण

(C) z-अक्ष का समीकरण (D) इनमें से कोई नहीं

हल जिस बिंदु के लिए $y = 0$, $z = 0$ उसका बिंदुपथ x-अक्ष है क्योंकि x-अक्ष पर y एवं z दोनों शून्य होते हैं।

उदाहरण 23 बिंदु L, बिंदु P (3, 4, 5) से xz तल पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु है। बिंदु L के निर्देशांक हैं:

(A) (3, 0, 0) (B) (0, 4, 5) (C) (3, 0, 5) (D) (3, 4, 0)

हल क्योंकि L, बिंदु P (3, 4, 5) से xz-तल पर डालें गए लंब का पाद बिंदु है और xz तल में स्थित सभी बिंदुओं का y निर्देशांक शून्य है। इसलिए लंब के पाद बिंदु के निर्देशांक (3, 0, 5) है।

उदाहरण संख्या 24 से 28 में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

उदाहरण 24 एक रेखा xy तल के समांतर है, यदि रेखा पर स्थित सभी बिंदुओं के ________ समान है।

हल xy तल के समांतर रेखा पर सभी बिंदुओं के z निर्देशांक समान होते हैं।

उदाहरण 25 समीकरण $x = b$ ______ तल के समांतर एक तल को निरूपित करता है।

हल क्योंकि $x = 0$, yz तल को निरूपित करता है इसलिए $x = b$, yz तल के समांतर मूलबिंदु से b इकाई की दूरी पर एक अन्य तल को निरूपित करता है।

उदाहरण 26 y-अक्ष से बिंदु P (3, 5, 6) की लंबवत् दूरी ______ है।

हल क्योंकि M, बिंदु P से y-अक्ष पर डाले गए लंब का पाद बिंदु है। इसलिए इसके x एवं z निर्देशांक शून्य हैं। M के निर्देशांक (0, 5, 0) हैं। P की y-अक्ष से लंबवत दूरी $\sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45}$ है।

उदाहरण 27 L, बिंदु P (3, 4, 5) से zx तल पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु है। L के निर्देशांक ______ हैं।

हल क्योंकि, L बिंदु P से zx-तल पर बनाए गए लंब का पाद बिंदु है और zx तल में प्रत्येक बिंदु का y निर्देशांक शून्य है। अत: L के निर्देशांक (3, 0, 5) हैं।

उदाहरण 28 बिंदु P (a, b, c) से z-अक्ष पर बनाए गए लंब के पाद बिंदु की P से दूरी ______ है।

हल P (a, b, c) से z-अक्ष पर बनाए गए लंब के निर्देशांक $(0, 0, c)$ इसलिए बिंदु P (a, b, c) एवं बिंदु $(0, 0, c)$ के बीच की दूरी $\sqrt{a^2+b^2}$ है।

बताइए कि उदाहरण संख्या 29 से 36 तक के कथन सत्य है अथवा असत्य है–

उदाहरण 29 y-अक्ष एवं z-अक्ष संयुक्त रूप से एक तल का निर्धारण करते हैं जिसे yz तल कहा जाता है।

उदाहरण सत्य

उदारहण 30 बिंदु (4, 5, – 6) छठे अष्टांशक में स्थत हैं।

हल असत्य, बिंदु (4, 5, – 6) 5वें अष्टांशक में है।

उदाहरण 31 x-अक्ष, दो तलों xy-तल एवं xz तल का प्रतिच्छेदन है।

हल सत्य

उदाहरण 32 तीन परस्पर लंब तल अंतरिक्ष को आठ अष्टांशक में विभाजित करते हैं।

हल सत्य

उदाहरण 33 तल का समीकरण $z = 6$ एक ऐसे तल को निरूपित करता है जो xy-तल के समांतर है और जिसका z अंत:खंड 6 इकाई है।

हल सत्य

उदाहरण 34 तल का समीकरण $x = 0$, yz-को निरूपित करता है।

हल सत्य

उदाहरण 35 x-अक्ष का बिंदु, जिसका x-निर्देशांक x_0 है, को $(x_0, 0, 0)$ के रूप में लिखा जाता है।

हल सत्य

उदाहरण 36 $x = x_0$, yz-तल के समांतर एक तल को निरूपित करता है।

हल सत्य

उदाहरण 37 स्तम्भ C_1 के अन्तर्गत दिए प्रश्नों में से प्रत्येक को, स्तम्भ C_2 के अन्तर्गत दिए गए सही उत्तर से मिलान कीजिए।

	स्तम्भ C_1		स्तम्भ C_2
(a)	यदि एक त्रिभुज का केन्द्रक मूल बिंदु पर है और दो शीर्ष (3, – 5, 7) एवं (–1, 7, – 6) हैं, तो तीसरा शीर्ष है:	(i)	समांतर चतुर्भुज
(b)	यदि किसी त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिंदु (1, 2, – 3), (3, 0, 1) एवं (–1, 1, – 4) हैं तो उसका केन्द्रक हैं:	(ii)	(–2, –2, –1)
(c)	बिंदु (3, – 1, – 1), (5, – 4, 0), (2, 3, – 2) एवं (0, 6, – 3) किसके शीर्ष हैं?	(iii)	समद्विबाहु समकोण त्रिभुज
(d)	बिंदु A(1, –1, 3), B (2, – 4, 5) एवं C (5, – 13, 11) हैं:	(iv)	(1, 1, – 2)
(e)	बिंदु A (2, 4, 3), B (4, 1, 9) एवं C (10, – 1, 6) किसके शीर्ष हैं?	(v)	संरेख

हल (a) मान लीजिए A (3, – 5, 7), B (– 1, 7, – 6), C (x, y, z) ऐसे त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं, जिसका केन्द्रक (0,0,0) है।

इसलिए $(0, 0, 0) = \left(\frac{3-1+x}{3}, \frac{-5+7+y}{3}, \frac{7-6+z}{3}\right) \Rightarrow \frac{x+2}{3}=0, \frac{y+2}{3}=0, \frac{z+1}{3}=0$.

अत: $x = -2$, $y = -2$ एवं $z = -1$ इसलिए (a) ↔ (ii)

(b) मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है और DEF क्रमश: BC, CA एवं AB के मध्य बिंदु हैं। हम जानते हैं कि त्रिभुज ABC का केंद्रक = त्रिभुज DEF का केंद्रक

Δ का केन्द्रक $\left(\frac{1+3-1}{3}, \frac{2+0+1}{3}, \frac{-3+1-4}{3}\right)$ अर्थात् (1, 1, – 2) है।

अतः (b) $\leftrightarrow$ (iv)

(c) विकर्ण AC का मध्य बिंदु $\left(\frac{3+2}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{-1-2}{2}\right)$ अर्थात् $\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2}\right)$ है।

विकर्ण BD का मध्य बिंदु $\left(\frac{5+0}{2}, \frac{-4+6}{2}, \frac{0-3}{2}\right)$ अर्थात् $\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2}\right)$ है।

समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को बराबर भागों में बांटते हैं। इसलिए (c) $\leftrightarrow$ (i)

(d) $|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (-4+1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{14}$

$|BC| = \sqrt{(5-2)^2 + (-13+4)^2 + (11-5)^2} = 3\sqrt{14}$

$|AC| = \sqrt{(5-1)^2 + (-13+1)^2 + (11-3)^2} = 4\sqrt{14}$

अब $|AB| + |BC| = |AC|$ अतः बिंदु A, B, C संरेख है। इसलिए (d) $\leftrightarrow$ (v)

(e) $AB = \sqrt{4+9+36} = 7$

$BC = \sqrt{36+4+9} = 7$

$CA = \sqrt{64+25+9} = 7\sqrt{2}$

अब $AB^2 + BC^2 = AC^2$ इस प्रकार ABC एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है। अतः (e) $\leftrightarrow$ (iii)

12.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. निम्नलिखित बिंदुओं का स्थान निर्धारित (Locate) कीजिए:

(i) (1, – 1, 3), (ii) (– 1, 2, 4)

(iii) (– 2, – 4, –7) (iv) (– 4, 2, – 5).

2. निम्नलिखित बिंदुओं में से प्रत्येक के लिए उस अष्टांश (octane) का नाम लिखिए जिसमें वह बिंदु स्थित है:

(i) (1, 2, 3), (ii) (4, – 2, 3), (iii) (4, –2, –5) (iv) (4, 2, –5)

(v) (– 4, 2, 5) (vi) (–3, –1, 6) (vii) (2, – 4, – 7) (viii) (– 4, 2, – 5).

3. एक बिंदु P से x, y एवं z अक्ष पर बनाए गए लंबों के पाद बिंदु क्रमशः A, B, C हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए A, B, C के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(i) (3, 4, 2) (ii) (–5, 3, 7) (iii) (4, – 3, – 5)

4. एक बिंदु P से xy, yz एवं zx तल पर बनाए गए लंबों के पाद बिंदु क्रमशः A, B एवं C हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए A, B, C के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिंदु P है–

(i) (3, 4, 5) (ii) (–5, 3, 7) (iii) (4, – 3, – 5).

5. बिंदु, (2, 0, 0) एवं (–3, 0, 0) एक दूसरे से कितनी दूरी पर हैं?

6. मूल बिंदु से बिंदु (6, 6, 7) तक की दूरी ज्ञात कीजिए।

7. दर्शाइए कि यदि $x^2 + y^2 = 1$, तो बिंदु $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$ मूल बिंदु से 1 इकाई की दूरी पर है।

8. दर्शाइए कि बिंदु A (1, – 1, 3), B (2, – 4, 5) एवं C(5, – 13, 11) संरेख है।

9. एक समांतर चतुर्भुज ABCD के तीन क्रमागत शीर्ष A (6, – 2, 4), B (2, 4, – 8), C (–2, 2, 4) है। चौथे शीर्ष के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** समान्तर चतुर्भुज के विकर्णों के मध्य बिंदु समान होते हैं।]

10. दर्शाइए कि त्रिभुज ABC, जिसके शीर्ष A (0, 4, 1), B (2, 3, – 1) एवं C (4, 5, 0) हैं, एक समकोण त्रिभुज है।

11. एक ऐसे त्रिभुज का तीसरा शीर्ष ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्रक मूल बिंदु है और दो शीर्ष (2, 4, 6) एवं (0, –2, –5) हैं।

12. एक त्रिभुज का केन्द्रक ज्ञात कीजिए यदि उसकी भुजाओं के मध्य बिंदु D (1, 2, – 3), E (3, 0, 1) एवं F (– 1, 1, – 4) हैं।

13. एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिंदु (5, 7, 11), (0, 8, 5) एवं (2, 3, – 1) हैं। त्रिभुज के शीर्ष ज्ञात कीजिए।

14. एक समांतर चतुर्भुज ABCD के तीन शीर्ष A (1, 2, 3), B (– 1, – 2, – 1) एवं C (2, 3, 2) हैं। चौथा शीर्ष D ज्ञात कीजिए।

15. ऐसे बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं A (2, 1, – 3) तथा B (5, – 8, 3) को मिलाने वाले रेखा खंड को समत्रिभाजित करते हैं।

16. यदि एक त्रिभुज ABC के शीर्ष A (a, 1, 3), B (– 2, b, – 5) एवं C (4, 7, c) हैं तथा केन्द्रक मूल बिंदु पर है, तो a, b, c के मान ज्ञात कीजिए।

17. मान लीजिए कि A (2, 2, – 3), B (5, 6, 9) एवं C (2, 7, 9) एक त्रिभुज के शीर्ष हैं। कोण A का अंतः समद्विभाजक BC को बिंदु D पर मिलाता है। D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

18. दर्शाइए कि तीन बिंदु A (2, 3, 4), B (–1, 2, – 3) एवं C (– 4, 1, – 10) संरेख हैं। बिंदु C द्वारा AB को विभाजित करने वाला अनुपात ज्ञात कीजिए।

19. एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिंदु (1, 5, – 1), (0, 4, – 2) एवं (2, 3, 4) हैं। त्रिभुज के शीर्ष तथा केन्द्रक ज्ञात कीजिए।

20. सिद्ध कीजिए कि बिंदु (0, – 1, – 7), (2, 1, – 9) एवं (6, 5, – 13) संरेख हैं। प्रथम बिंदु द्वारा अन्य दो बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड को विभाजित करने का अनुपात ज्ञात कीजिए।

21. दो इकाई भुजा वाले एक घन के शीर्ष क्या हैं, यदि उसका एक शीर्ष मूल बिंदु के संपाती है, और मूल बिंदु से जाने वाली तीन भुजाएं मूलबिंदु से जाने वाली अक्षों की धनात्मक दिशाओं के संपाती हैं।

वस्तुनिष्ठीय प्रश्न

प्रश्न संख्या 22 *से* 34 *तक प्रत्येक के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए–* (M.C.Q.)

22. बिंदु P(3, 4, 5) की yz-तल से दूरी है:

(A) 3 इकाई (B) 4 इकाई (C) 5 इकाई (D) 550 इकाई

23. बिंदु P (3, 4, 5) से y-अक्ष पर बनाए गए पाद लम्ब की लम्बाई है।

(A) $\sqrt{41}$ (B) $\sqrt{34}$ (C) 5 (D) इनमें से कोई नहीं।

24. बिंदु (3, 4, 5) की मूल बिंदु से दूरी है:

(A) $\sqrt{50}$ (B) 3 (C) 4 (D) 5

25. यदि बिंदुओं (a, 0, 1) और (0, 1, 2) के बीच की दूरी $\sqrt{27}$ है, तो a का मान है:

(A) 5 (B) ± 5 (C) – 5 (D) इनमें से कोई नहीं

26. x-अक्ष निम्नलिखित में से कौन से दो तलों का प्रतिच्छेन है:

(A) xy एवं xz (B) yz एवं zx (C) xy एवं yz (D) इनमें से कोई नहीं

27. y-अक्ष का समीकरण है:

(A) $x = 0, y = 0$ (B) $y = 0, z = 0$ (C) $z = 0, x = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं

28. बिंदु (–2, –3, –4) निम्नलिखित में से किस अष्टांशक (octant) में स्थित है:

(A) प्रथम (B) सातवां

(C) दूसरा (D) आठवां

29. एक तल, yz तल के समांतर है इसलिए यह लम्ब है:

(A) x-अक्ष पर (B) y-अक्ष पर (C) z-अक्ष पर (D) इनमें से कोई नहीं

30. एक बिंदु, जिसके लिए $y = 0, z = 0$, का बिंदुपथ है:

(A) x-अक्ष का समीकरण (B) y-अक्ष का समीकरण

(C) z-अक्ष का समीकरण (D) इनमें से कोई नहीं

31. एक बिंदु, जिसके लिए $x = 0$, का बिंदुपथ है:

(A) xy-तल (B) yz-तल (C) zx-तल (D) इनमें से कोई नहीं

32. यदि बिंदुओं (5, 8, 10) एवं (3, 6, 8) से, निर्देशांक तलों के समांतर तल खींचकर एक षट्फलकीय बनाया जाता है, तो उसके विकर्ण की लम्बाई है:

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$

33. L, बिंदु P (3, 4, 5) से xy-तल पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु है, बिंदु L के निर्देशांक हैं:

(A) (3, 0, 0) (B) (0, 4, 5) (C) (3, 0, 5) (D) कोई नहीं

34. किसी बिंदु (3, 4, 5) से x-अक्ष पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु L हैं। L के निर्देशांक हैं:

(A) (3, 0, 0) (B) (0, 4, 0) (C) (0, 0, 5) (D) कोई नहीं

प्रश्न संख्या 35 से 49 में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

35. तीन अक्ष OX, OY, OZ बनाते हैं ________

36. तीन तल समकोणिक षट्फलकीय को दर्शाते हैं, जिसमें ________ समकोणिक फल होते हैं।

37. किसी बिंदु के निर्देशांक ________ से क्रमागत अक्षों पर लंबवत् दूरी होती है।

38. तीन निर्देशांक तल अंतरिक्ष को ________ भागों में विभाजित करते हैं।

39. यदि कोई बिंदु P, yz तल में स्थित है, तो yz तल में उस बिंदु के निर्देशांक ________ के रूप में होंगे।

40. yz तल का समीकरण ________ है।

41. यदि बिंदु P, z-अक्ष पर स्थित है, तो P के निर्देशांक ________ के रूप में होंगे।

42. z-अक्ष का समीकरण ________ है।

43. एक रेखा xy तल के समांतर है, यदि रेखा के सभी बिंदुओं का ________ समान है।

44. एक रेखा x-अक्ष के समांतर है यदि रेखा के सभी बिंदुओं का ________ समान है।

45. $x = a$ एक ऐसे तल को निरूपित करता है जो ________ के समांतर है।

46. yz-तल के समांतर तल ________ के लंबवत है।

47. एक समकोणिक कमरे की विमाएं 10, 13 एवं 8 इकाई है। उस कमरे में सीधे फैलाई जा सकने वाली रस्सी की अधिकतम लम्बाई _______ है।

48. यदि बिंदुओं $(a, 2, 1)$ एवं $(1, -1, 1)$)के बीच की दूरी 5 है, तो a का मान ________ है।

49. यदि एक त्रिभुज की भुजाओं AB, BC, CA के मध्य बिंदु क्रमशः D (1, 2, – 3), E (3, 0, 1) एवं F (–1, 1, – 4) हैं, तो त्रिभुज ABC का केन्द्रक ________ है।

50. स्तम्भ C_1 के अन्तर्गत दिए हुए प्रत्येक प्रश्न का स्तम्भ C_2 के अन्तर्गत दिए गए सही उत्तर के साथ मिलान कीजिए।

स्तम्भ C_1	**स्तम्भ C_2**
(a) xy-तल में	(i) प्रथम अष्टांशक
(b) बिंदु (2, 3,4) स्थित है।	(ii) yz-तल
(c) ऐसे बिंदु जिनका x निर्देशांक शून्य हैं उनका बिंदुपथ है:	(iii) z-निर्देशांक शून्य है
(d) एक रेखा x-अक्ष के समांतर है यदि और केवल यदि	(iv) z-अक्ष
(e) यदि $x = 0, y = 0$ को संयुक्त रूप से लेने पर निरूपित करते हैं	(v) xy-तल के समांतर तल
(f) $z = c$ जिस तल को निरूपित करता है वह है:	(vi) यदि रेखा के सभी बिंदुओं के y एवं z निर्देशांक समान है।
(g) तल $x = a$, और तल $y = b$ जिस रेखा को निरूपित करते हैं वह है:	(vii) बिंदु से क्रमागत अक्षों पर
(h) एक बिंदु के निर्देशांक मूल बिंदु से लंब के पाद बिंदु तक की दूरी है	(viii) z - अक्ष के समांतर
(i) अंतरिक्ष में एक गेंद जिससे घिरा हुआ ठोस क्षेत्र है वह है	(ix) चक्रिका (डिस्क)
(j) तल में वृत्त से घिरा हुआ क्षेत्र कहलाता है।	(x) गोला